# Analyse Complexe
# TD 2
# Formule de Cauchy et premières conséquences

**Exercice 1** Soit $D = D(0,1)$, $0 < r < 1$. Soit $f \in H(D)$, bornée par $M > 0$ sur le cercle $|z| = r$ et s'annulant en au moins un point $a \in D(0,r)$. Montrer que

$$|f(0)| \leq \frac{M|a|}{r - |a|}.$$

**Exercice 2**

1. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le secteur angulaire délimité par les segments $[0,R]$ et $[0, Re^{i\pi/4}]$ $(R > 0)$, calculer les intégrales
$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$
2. Soit $a$ un réel strictement positif. Calculer
$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(ax)dx$$
en intégrant une fonction bien choisie sur le rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R + ia/2\}$, $R > 0$.
3. En utilisant le morceau de couronne délimité par deux demi-cercles centrés en 0, calculer
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} - 1}{x}dx$$
et en déduire la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx.$$
4. En utilisant le même contour que dans la question précédente, calculer
$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx \quad , \quad J = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

**Exercice 3** (*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$. On note $h(z) = z^{2n}P(z + z^{-1})\bar{P}(z + z^{-1})$ ($\bar{P}$ est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de $P$). On suppose par l'absurde que $P$ est sans racine. En considérant l'intégrale

$$\frac{1}{i}\int_S \frac{\zeta^{2n-1}}{h(\zeta)}d\zeta,$$

aboutir à une contradiction. Une preuve de plus du "théorème fondamental de l'algèbre" !

**Exercice 4** Soit $f$ une fonction continue sur $\bar{D}(0,1)$, holomorphe sur $D(0,1)$. On suppose que les coefficients dans le développement en série entière de $f$ en 0 sont tous des entiers. Montrer que $f$ est un polynôme.

**Exercice 5**

1. Soit $D \geq 0$. Montrer un analogue du théorème de Liouville pour les fonctions qui sont $\mathcal{O}(|z|^D)$ quand $|z| \to \infty$.

2. Soit $f$ une fonction entière. Montrer que si $|f| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, alors $f$ est un polynôme.
3. (*) Soit $f$ une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0, r)$, telle que $f(0)$ ne soit pas nul. On note $M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (indépendante de $f$) telle que le nombre de zéros de $f$ dans $D(0, r/3)$ est inférieur ou égal à $C \log(M/|f(0)|)$.

   *Considérer $g(z) = \frac{f(z)}{\Pi(1-\frac{z}{z_m})}$ où les $z_m$ sont les zéros de $f$ dans $D(0, r/3)$.*

**Exercice 6** On note $S$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Un *point singulier* de $f$ est un élément $z \in S$ tel que la fonction $f$ ne s'étende pas en une fonction holomorphe sur un voisinage de $z$. On note $\mathcal{S}(f)$ l'ensemble des points singuliers de $f$ et $\mathcal{R}(f) = S \backslash \mathcal{S}(f)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}(f)$ est un fermé non vide de $S$.
2. Un premier exemple : on suppose que $a_n \geq 0$ pour tout $n$. Montrer que $1 \in \mathcal{S}(f)$. Donner un exemple de telle série avec $\mathcal{S}(f) = \{1\}$.
3. Un deuxième exemple : montrer que si $f(z) = \sum a_n z^{n!}$ est une série entière de rayon de convergence 1 avec $a_n \geq 0$ pour tout $n$, $\mathcal{S}(f) = S$.
4. Soit $\lambda > 0$ entier et $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ deux suites d'entiers positifs vérifiant
$$\forall n,\ \lambda q_n > (\lambda + 1)p_n$$
   et supposons que $a_k = 0$ dès qu'il existe $n$ tel que $p_n < k < q_n$. On suppose que $1 \in \mathcal{R}(f)$.
   (a) On note $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z^\lambda + z^{\lambda+1})$. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de $f \circ \varphi$ en l'origine est strictement plus grand que 1.
   (b) Montrer que la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{p_n} a_k z^k)_n$ converge sur un voisinage de 1.
5. Soit $c > 1$ un réel, et $(p_n)_n$ une suite d'entiers vérifiant
$$\forall n,\ p_{n+1} \geq c p_n.$$
   On suppose que $a_k = 0$ dès qu'il existe $n$ tel que $p_n < k < p_{n+1}$. Montrer que $\mathcal{S}(f) = S$.
6. *Exemple.* Montrer que la série
$$f(z) = 1 + 2z + \sum_{k \geq 1} 2^{-k^2} z^{2^k}$$
   définit une fonction injective et continue sur le disque unité fermé, holomorphe sur le disque ouvert, infiniment différentiable en tout point de $S$ mais ne se prolonge holomorphiquement en aucun point de $S$.

   *Les deux questions précédentes sont intéressantes car elles montrent que contrairement à ce que suggère l'intuition, la lacunarité et la continuité au bord n'excluent pas la présence de singularités.*
7. (Si vous avez fait l'exercice 6 du TD 1) Montrer qu'en général on n'a ni $E(f) \subset \mathcal{R}(f)$, ni $\mathcal{R}(f) \subset E(f)$.

   *Toutefois, un théorème de Fatou affirme que si l'on suppose $a_n \to 0$, alors $\mathcal{R}(f) \subset E(f)$. En particulier on voit que pour l'exemple de Luzin de l'exercice 6 du TD 1, tous les points du cercle sont singuliers.*

**Exercice 7** (*)

1. Soit $U$ un domaine borné de $\mathbb{C}$, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe en restriction à $U$. Soit $a \in U$ tel que $s := \min_{z \in \partial U} |f(z) - f(a)| > 0$. Montrer que $f(U)$ contient $D(f(a), s)$.
2. On considère le cas $U = D(0, r)$ et on suppose que $f$ est non constante, holomorphe sur un voisinage de $U$ ($f$ satisfait donc en particulier aux hypothèses de la question précédente) et vérifie $||f'||_U \leq 2|f'(0)|$. Montrer que $D(f(0), R) \subset f(U)$, avec $R := (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)|$.

   *On pourra écrire $f(z) - f(0) - f'(0)z = \int_{[0,z]}(f'(\zeta) - f'(0))d\zeta$ et appliquer la formule de Cauchy à l'intégrande.*
3. Soit $f$ une fonction holomorphe non constante sur un voisinage du disque unité $D$. Montrer que la fonction continue $z \mapsto |f'(z)|(1 - |z|)$ sur $\bar{D}$ atteint son maximum en un point $p \in D$ et que $|f'(z)| \leq 2|f'(p)|$ si $z \in D(p, (1 - |p|)/2)$.
4. Sous les hypothèses de la question précédente montrer que
$$D(f(p), (\frac{3}{2} - \sqrt{2})|f'(0)|) \subset f(D).$$
   En déduire que l'image d'une fonction entière contient des disques de rayon arbitrairement grand.